Mathématiques : analyse

Séance 5 : Suites bornées, monotones, sous-suites

MATH-S-1011 et MATH-S-1021 — Université libre de Bruxelles

Solvay Brussels School of Economics and Management

Auteurs : Germain Van Bever et Davy Paindaveine

Contenu de la séance

Suites bornées

Suites monotones

Sous-suites

Règles de calculs

Dans les épisodes précédents

- Lors de la dernière séance, nous avons défini la notion de suite...

$$(u_1, u_2, ...) = (u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

- ...ainsi qu'explicité le fait qu'une telle suite converge vers une limite $u \in \mathbb{R}$:

$$\text{Pour tout } \epsilon, \text{ il existe } N \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } |u_n - u| \leq \epsilon, \text{ pour tout } n \geq N.$$

- Nous avons également étudié deux suites particulières : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Contenu de la séance

Suites bornées

Suites monotones

Sous-suites

Règles de calculs

Suite bornée

Définition 5.1

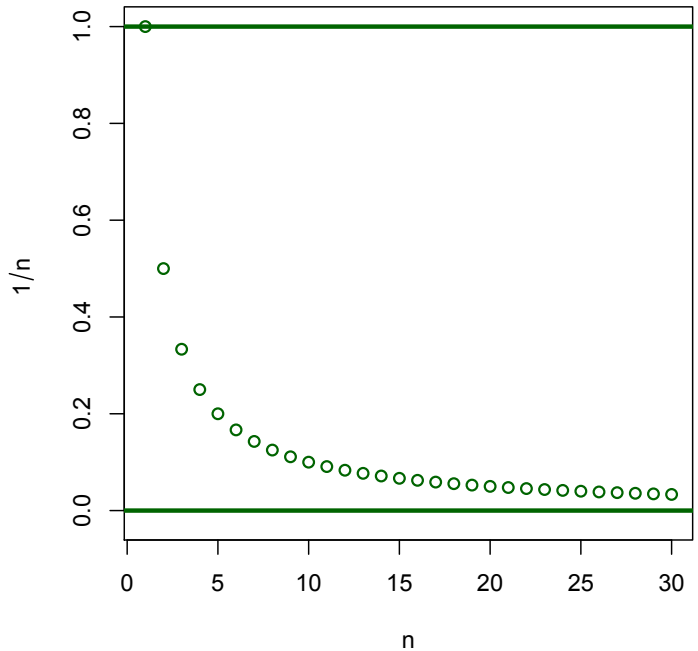
Soit (u_n) *une suite. On dit que* (u_n) *est* minorée $\iff$ $\{u_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *est minoré.*

$\exists m$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $m \leq u_m$

(u_n) *est* majorée $\iff$ $\{u_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *est majoré.*

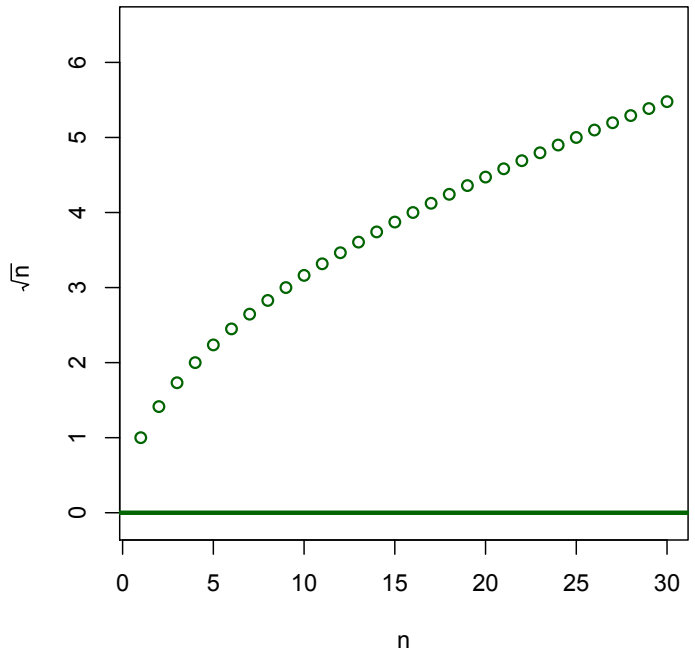
$\exists M$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $u_m \leq M$.

(u_n) *est* bornée $\iff$ (u_n) *est minorée et majorée.*



$(\frac{1}{n})$ est minorée et majorée

$\Rightarrow (\frac{1}{n})$ est bornée



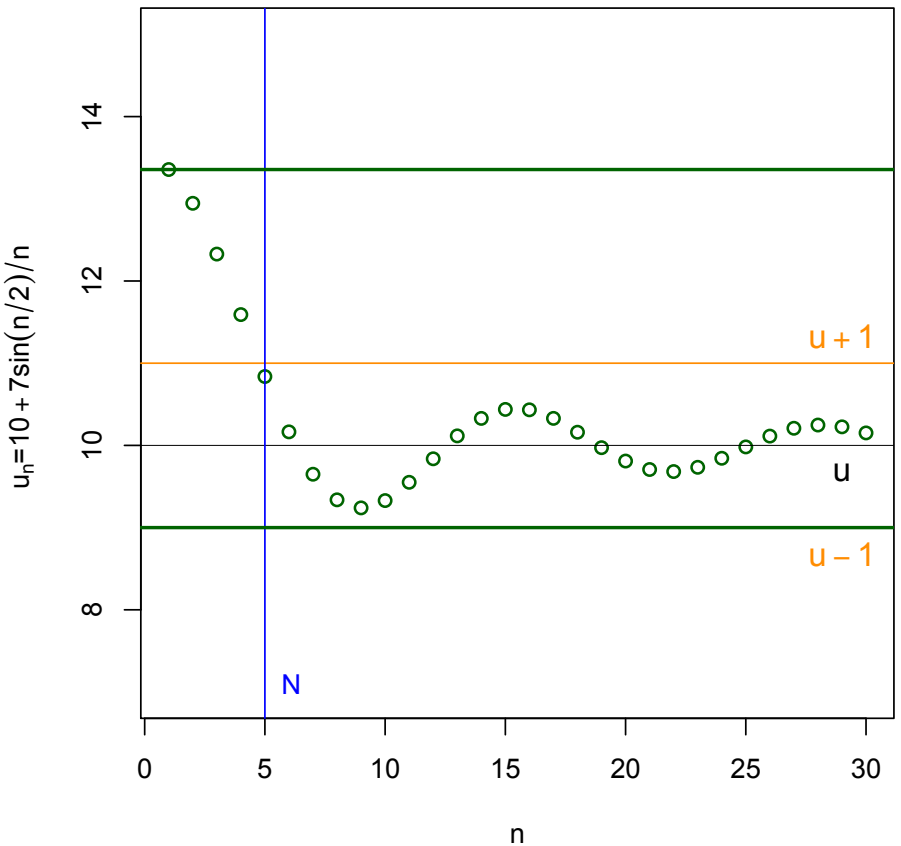
$(\sqrt{n})$ est minorée et non majorée

$\Rightarrow (\sqrt{n})$ n'est pas bornée

Lien avec la convergence

Théorème 5.2

Soit (u_n) une suite. Si la suite (u_n) converge dans $\mathbb{R}$, alors (u_n) est bornée.



Démonstration du Théorème 5.2

Hyp : $(u_n) \to u \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - u| \leq \varepsilon$.

Donc pour $n \geq N$, $-\varepsilon \leq u_n - u \leq \varepsilon$

$\iff$ pour $n \geq N$, $u - \varepsilon \leq u_n \leq u + \varepsilon$.

Donc (u_n) est bornée par $u-\varepsilon$ et $u+\varepsilon$ à partir du rang N.

De plus, pour $n \in \{1; 2; \dots; N-1\}$, considérons

$M = \max(u_1, u_2, \dots, u_{N-1}, u+\varepsilon)$.

De même

$m = \min(u_1, u_2, \dots, u_{N-1}, u-\varepsilon)$,

on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$m \leq u_n \leq M$. Donc (u_n) bornée.

Réciproque du Théorème 5.2

Considérons l'implication (u_n) converge dans $\mathbb{R} \Longrightarrow (u_n)$ est bornée.

Son implication réciproque, c'est-à-dire

$$(u_n) \text{ converge dans } \mathbb{R} \Longleftarrow (u_n) \text{ est bornée},$$

est fausse. Par exemple, on verra que $((-1)^n)$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

Contraposée du Théorème 5.2

Considérons l'implication (u_n) converge dans $\mathbb{R} \Longrightarrow (u_n)$ est bornée.

Sa réciproque est fausse. Par contre, sa contraposée, c'est-à-dire

$$(u_n) \text{ ne converge pas dans } \mathbb{R} \Longleftarrow (u_n) \text{ n'est pas bornée},$$

est toujours vraie. Elle peut être utile pour montrer la non-convergence dans $\mathbb{R}$. Par exemple, elle établit que $(1, 2, 3, \ldots)$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

Contenu de la séance

Suites bornées

Suites monotones

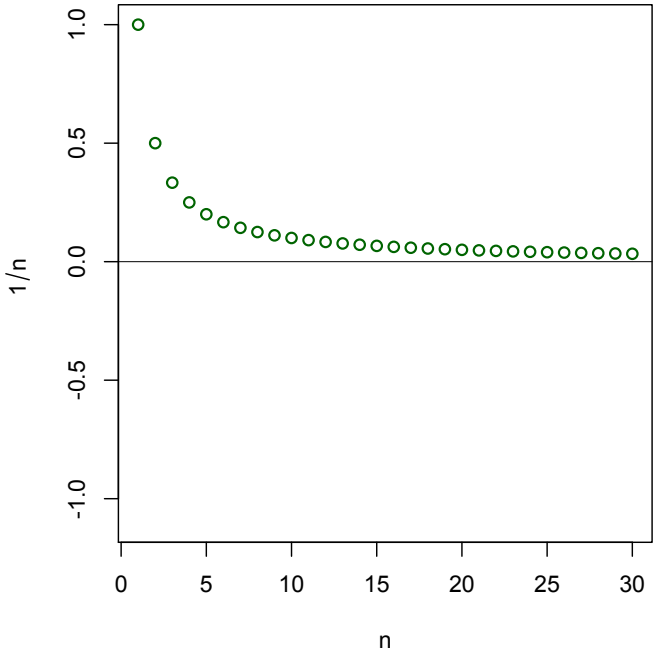
Sous-suites

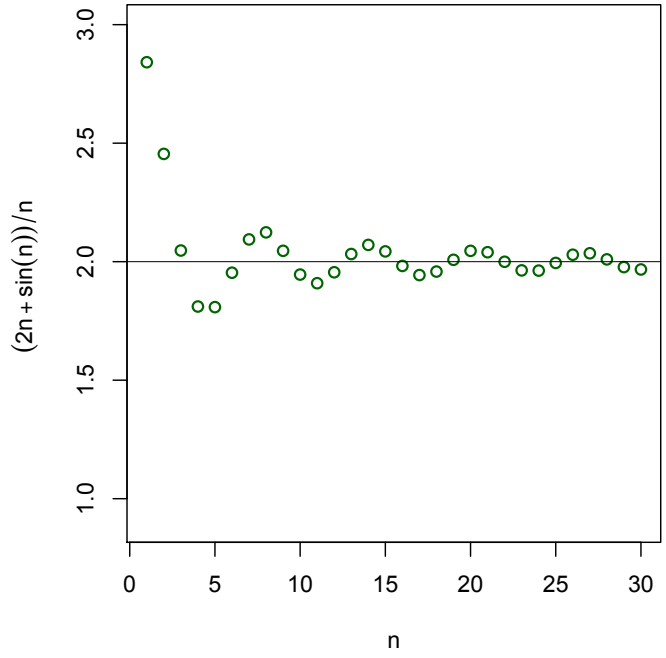
Règles de calculs

Suites monotones

Définition 5.3

(u_n) *est (strictement) croissante* $\Leftrightarrow$ $n \mapsto u_n$ *est (strictement) croissante.*
(u_n) *est (strictement) décroissante* $\Leftrightarrow$ $n \mapsto u_n$ *est (strictement) décroissante.*
(u_n) *est (strictement) monotone* $\Leftrightarrow$ (u_n) *est (strictement) croissante ou décroissante.*





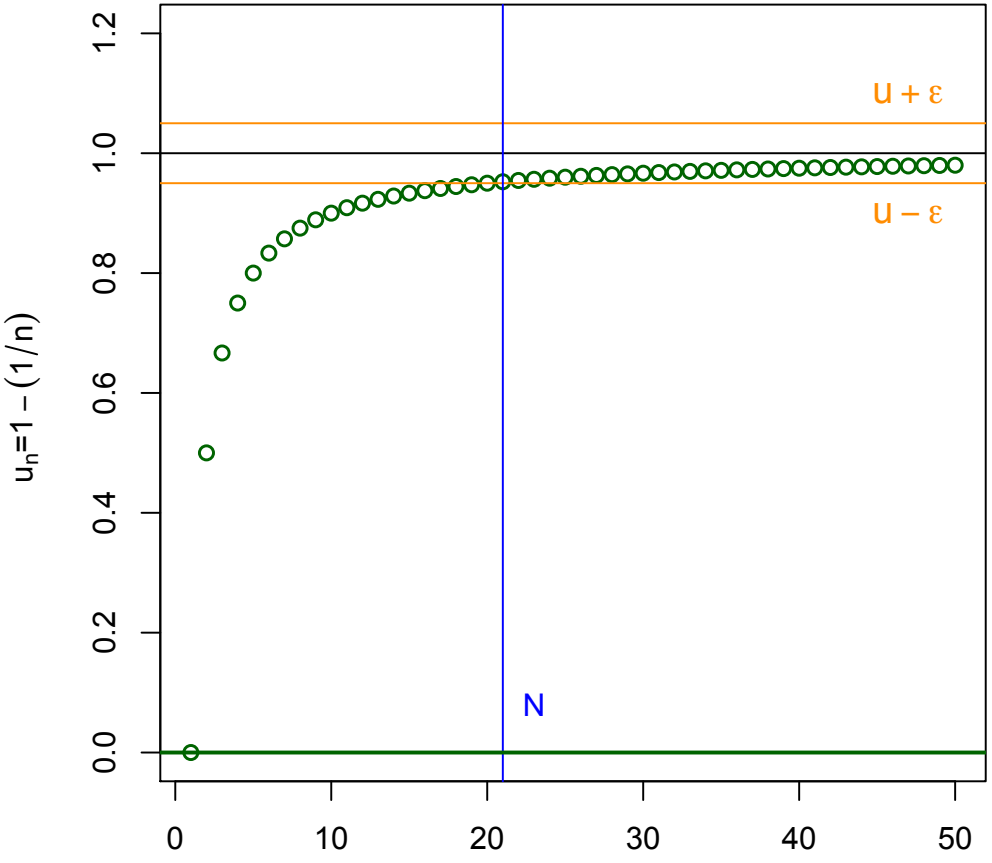
$(\frac{1}{n})$ est strictement décroissante
$\Rightarrow (\frac{1}{n})$ est strictement monotone

$(\frac{2n+\sin n}{n})$ n'est ni croissante ni décr.
$\Rightarrow (\frac{2n+\sin n}{n})$ n'est pas monotone

Convergence de suites croissantes et majorées

Théorème 5.4

Soit (u_n) *une suite. Si la suite* (u_n) *est croissante et majorée, alors* $(u_n) \to u$, *où* $u = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}_0\}$.



Démonstration du Théorème 5.4

hyp: (u_n) est croissante et majorée.

Mq: $(u_n) \longrightarrow u$ et $u = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_0$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - u| \leq \varepsilon$.

- Puisque (u_n) est majorée : $\{u_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ est majorée et admet une borne $u = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}_0\}$.

$\forall n \in \mathbb{N}_0$, $u_n \leq u$. → vraie car $\varepsilon > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $u_n \leq u \leq u + \varepsilon$.

Considérons la quantité $u - \varepsilon$, puisque la suite (u_n) est croissante, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N$, $u_n > u - \varepsilon$. Donc au final,

$\forall n \geq N$, $u - \varepsilon < u < u + \varepsilon$. donc on a bien :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_0$, $\forall n \geq N$, $|u_n - u| \leq \varepsilon$.

Autres résultats

- Attention, il ne suffit pas que la suite soit croissante pour qu'elle soit convergente !
- Par exemple, la suite $(1, 2, 3, \dots)$ ne converge pas.
- De la même manière, il est possible de prouver le résultat suivant.

Théorème 5.5

Soit (u_n) *une suite. Si la suite* (u_n) *est décroissante et minorée, alors* $(u_n) \to u$, *où* $u = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Interlude : preuve du Théorème 5.5

Relisez la démonstration du Théorème 5.4. Adaptez la preuve pour développer celle du 5.5. Echangez ensuite votre preuve avec votre voisin.e et comparez.

$\{u_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ est minorée donc $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ existe $= u$.

Soit $\varepsilon > 0$,

$\forall n \in \mathbb{N}_0$, $u \leq u_n$. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0$, $u - \varepsilon \leq u \leq u_n$

Ensuite, puisque (u_n) décroissante, $\exists N \in \mathbb{N}_0$,

tel que $\forall n \geq N$, $u_n \leq u + \varepsilon$

Donc

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_0$, $\forall n \geq N$, $u - \varepsilon \leq u_n \leq u + \varepsilon$

$\forall n \geq N$, $|u_n - u| \leq \varepsilon$.

Contenu de la séance

Suites bornées

Suites monotones

Sous-suites

Règles de calculs

Sous-suite

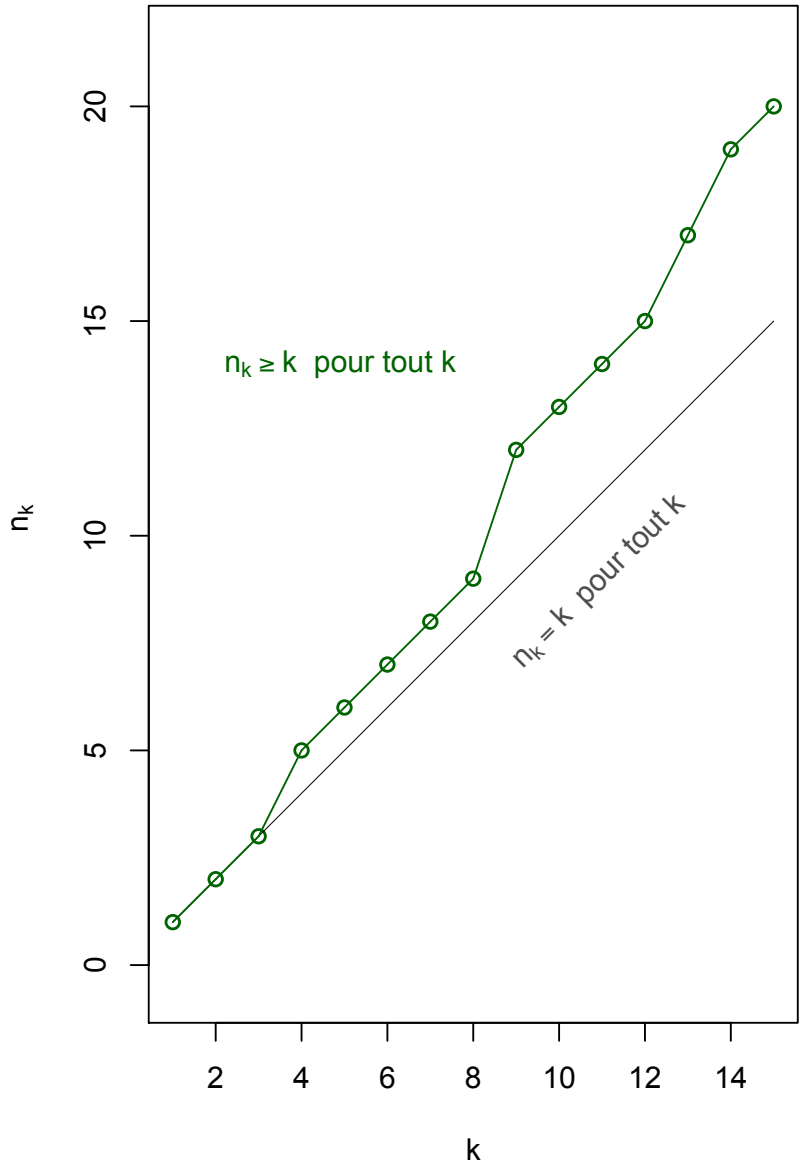
- Une sous-suite (ou suite partielle) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est une suite obtenue en supprimant certains termes de (u_n).
- Pour déterminer une sous-suite, on utilise une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ (strictement croissante dans $\mathbb{N}_0$) indiquant les indices des termes conservés.
- Cette suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ fournit la sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Exemples: pour la suite originale

$$(u_n) = (-1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots),$$

- $(n_k) = (2, 4, 6, \ldots)$ fournit la sous-suite $(u_{n_k}) = (1, 2, 3, \ldots)$.
- $(n_k) = (1, 3, 5, \ldots)$ fournit la sous-suite $(u_{n_k}) = (-1, -2, -3, \ldots)$.
- $(n_k) = (1, 4, 6, \ldots)$ fournit la sous-suite $(u_{n_k}) = (-1, 2, 3, \ldots)$.

Sous-suite : illustration



"Dans toute sous-suite (u_{n_k}), le temps s'écoule au moins aussi vite dans que dans (u_n)."

Sous-suite de suite convergente

Ceci mène directement au résultat suivant (pourquoi ?).

Théorème 5.6

Soit (u_n) *une suite qui converge vers* u $(\in \mathbb{R})$. *Alors, toute sous-suite* (u_{n_k}) *converge vers* u.

Extraire une sous-suite d'une suite qui converge dans $\mathbb{R}$ n'affecte donc

(a) ni la convergence,

(b) ni la limite.

ex : $u_n = \frac{1}{n} \to 0$.

$u_{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$.

Si la suite des taux de chômage annuels converge vers 5%, *alors la suite des taux de chômage associés aux années paires converge vers* 5%.

Implication du Théorème 5.6

Ainsi, pour prouver que (u_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$, on peut (quand c'est possible)

(a) extraire une sous-suite qui ne converge pas dans $\mathbb{R}$,

Exemple : $(1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots)$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$, car elle admet la sous-suite $(1, 2, 3, \ldots)$ qui ne converge pas dans $\mathbb{R}$,

ou

(b) extraire deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes.

Exemple : $((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$, car elle admet les sous-suites $(-1, -1, -1, \ldots) \to -1$ et $(1, 1, 1, \ldots) \to 1$.

Contenu de la séance

Suites bornées

Suites monotones

Sous-suites

Règles de calculs

Introduction

- Les sous-suites permettent, dans certains cas, de prouver la divergence des suites.
- Mais en cas de convergence, nous manquons d'outils pour déterminer la limite.
- Cette section fournit de tels outils.
- Une première série de résultats montre que les opérations arithmétiques classiques maintiennent(!) la convergence...
- ... et explique comment calculer les limites des suites qui résultent de ces opérations.

Remarque importante

Nous utiliserons plusieurs fois dans cette section le fait que, dans la définition de convergence

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } |u_n - u| \leq \varepsilon \text{ pour tout } n \geq N,$$

il est possible

- de remplacer n'importe quelle inégalité non stricte ($\leq$ ou $\geq$) par une inégalité stricte ($<$ ou $>$), et
- de remplacer ε par $c\varepsilon$ pour une constante c fixée.

Limite d'une somme

Théorème 5.7

Soient $(u_n) \to u\ (\in \mathbb{R})$ *et* $(v_n) \to v\ (\in \mathbb{R})$. *Alors* $(u_n + v_n) \to u + v$.

Démonstration :

$(u_n) \to u \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_u \in \mathbb{N}_0,\ \forall n \geq N,\ |u_n - u| \leq \varepsilon$.

$(v_n) \to v \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_v \in \mathbb{N}_0,\ \forall n \geq N,\ |v_n - v| \leq \varepsilon$.

Mq : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_0,\ \forall n \geq N,\ |(u_n + v_n) - (u + v)| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$,

$|(u_n + v_n) - (u + v)| = |(u_n - u) + (v_n - v)| \leq |u_n - u| + |v_n - v|$ (inég. triang.)

Soit $N = \max(N_u, N_v)$, on a pour tout $n \geq N$:

$|u_n - u| \leq \varepsilon$ et $|v_n - v| \leq \varepsilon$ au final :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_0$ tel que $\forall n \geq N,\ |(u_n + v_n) - (u + v)| \leq 2\varepsilon$.

Limite d'un produit

Théorème 5.8

Soient $(u_n) \to u\ (\in \mathbb{R})$ *et* $(v_n) \to v\ (\in \mathbb{R})$. *Alors* $(u_n v_n) \to uv$.

Démonstration :

Mq : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |u_n v_n - uv| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$|u_n v_n - uv| = |u_n v_n - u v_n + u v_n - uv|$$

$$= |(u_n - u) v_n + u(v_n - v)| \qquad \leq \varepsilon$$

$$\leq |(u_n - u) v_n| + |u(v_n - v)| = |u_n - u| \cdot |v_n| + |u| \cdot |v_n - v|.$$

$|u| \cdot |v_n - v| \leq \varepsilon$

On a (v_n) convergente $\Rightarrow$ (v_n) bornée

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}_0,\ |v_n| \leq M$. Donc on a :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = \max(N_u, N_v)$ tq $\forall n \geq N,\ |u_n v_n - uv| \leq M \cdot \varepsilon + |u| \cdot \varepsilon = (M + |u|)\varepsilon$

Limite d'un produit scalaire et d'une combinaison linéaire

Corollaire 5.9

Soient $(u_n) \to u\ (\in \mathbb{R})$ *et* $c \in \mathbb{R}$. *Alors* $(cu_n) \to cu$.

Corollaire 5.10

Soient $(u_n^{(i)}) \to u^{(i)}\ (\in \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, k\ (\in \mathbb{N}_0)$. *Soient* $c^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$, *des réels fixés. Alors* $(c^{(1)}u_n^{(1)} + \ldots + c^{(k)}u_n^{(k)}) \to c^{(1)}u^{(1)} + \ldots + c^{(k)}u^{(k)}$.

Exemple :

$$\left(\frac{2\sqrt{n}-3}{n}\right) = \left(2 \times \frac{1}{\sqrt{n}} + (-3) \times \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 2 \times 0 + (-3) \times 0 = 0.$$

$u_n \to 0$ $\quad v_n \to 0$

Limite d'un inverse

Lemme 5.11 (sans démonstration)

Soit (v_n) *une suite dans* $\mathbb{R}_0$*, qui converge vers* v $(\in \mathbb{R}_0)$*. Alors* $\left(\frac{1}{v_n}\right) \to \frac{1}{v}$.

En écrivant $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$, on obtient alors le résultat suivant.

Théorème 5.12

Soit $(u_n) \to u$ $(\in \mathbb{R})$*. Soit* (v_n) *une suite dans* $\mathbb{R}_0$*, qui converge vers* v $(\in \mathbb{R}_0)$*. Alors* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \to \frac{u}{v}$.

Combinaison

Ces résultats permettent d'étudier la convergence de suites assez complexes. Par exemple,

factorisation par n^2.

$$\left(\frac{2n^2+n+3}{3n^2-1}\right) = \left(\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}\right) = \left(\frac{2+\frac{1}{n}+3\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}}\right) \to \frac{2+0+3\times 0\times 0}{3-0\times 0} = \frac{2}{3}.$$

En procédant de même, on obtient que

$$\left(\frac{c_\ell n^\ell + \ldots + c_2 n^2 + c_1 n + c_0}{d_\ell n^\ell + \ldots + d_2 n^2 + d_1 n + d_0}\right) \to \frac{c_\ell}{d_\ell},$$

quels que soient $\ell \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, \ldots, c_\ell, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell-1} \in \mathbb{R}$ et $d_\ell \in \mathbb{R}_0$.

Lemme

Lemme 5.13

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, avec $(v_n) \to 0$. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N$. Alors $(u_n) \to 0$.

Démonstration : hyp : $(v_n) \to 0$: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_0, \forall n \geq N, |v_n - 0| \leq \varepsilon$.

ici, $v_n \geq 0 \ \forall n \Rightarrow |v_n| = v_n$.

Mq : $(u_n) \to 0$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_0$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - 0| \leq \varepsilon$.

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_0$ tel que $\forall n \geq N, u_n \leq \varepsilon$ (car $u_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$)

On a : pour tout $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq v_n$

or, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, v_n \leq \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq v_n \leq \varepsilon$

Théorème de l'étau

Théorème 5.14 ("théorème de l'étau")

Soient (a_n), (b_n) et (c_n) des suites réelles telles que $(a_n) \to a$ et $(c_n) \to a$. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout $n \geq N$. Alors $(b_n) \to a$.

Démonstration :

On a : $\forall n \geq N,\ a_n \leq b_n \leq c_n \iff \forall n \geq N,\ a_n - a_n \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$

$\iff \forall n \geq N,\ 0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n.$

Or, $(c_n) \to a$, $(a_n) \to a$, $c_n - a_n \longrightarrow a - a = 0$.

D'après le thm. précédent on a :

$$b_n - a_n \longrightarrow 0.$$

Or, $b_n = a_n + (b_n - a_n) \longrightarrow a + 0 = a$.

($a_n \to a$, $b_n - a_n \to 0$)

D'où $b_n \longrightarrow a$.

Théorème de l'étau : exemple

Quelle est la limite de $\left(\frac{\sin n}{n}\right)$? (si elle existe)

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq \sin(n) \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$

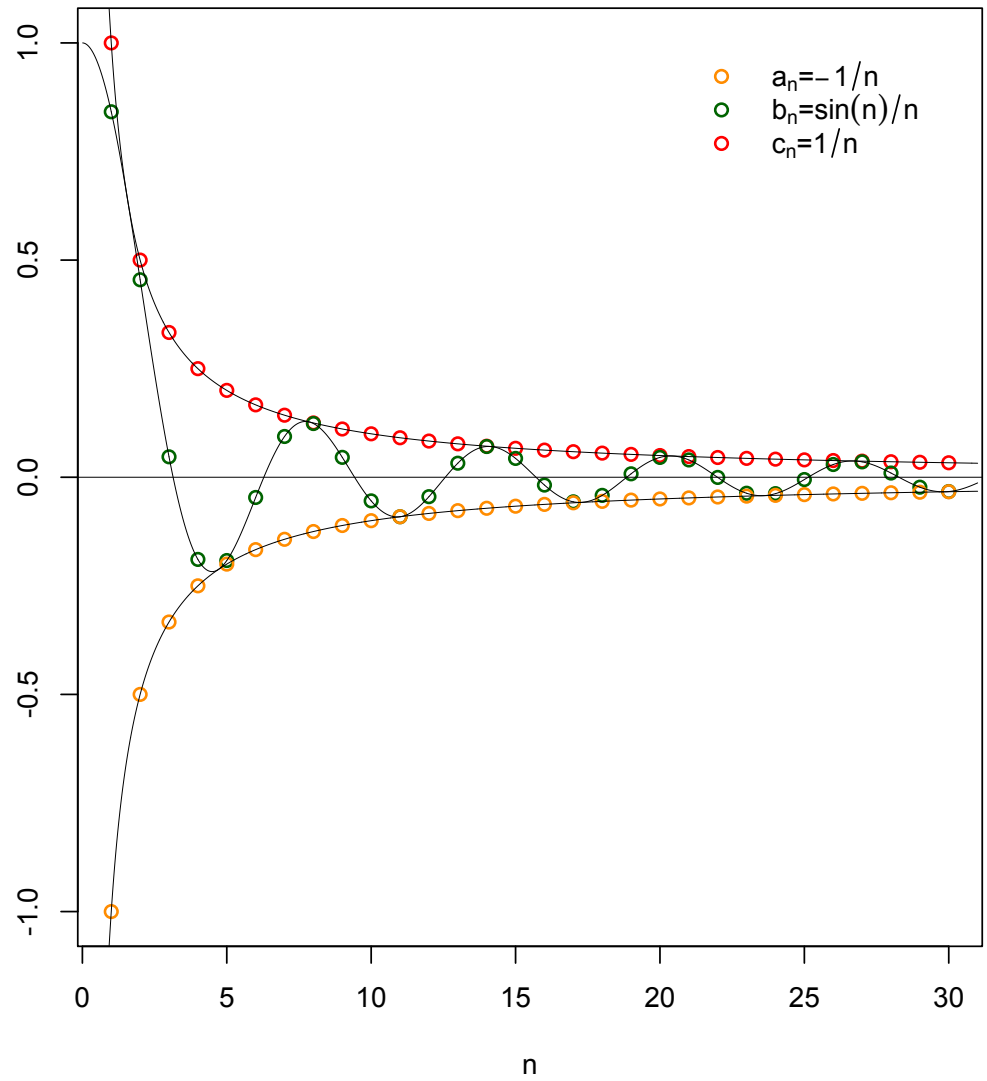
$$\underbrace{-\frac{1}{n}}_{\to 0} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0,$$

le théorème de l'étau montre que

$$\left(\frac{\sin n}{n}\right) \to 0.$$

Remarque : ici, on ne peut pas utiliser "*limite d'un quotient = quotient des limites*" (pourquoi ?).

Théorème de l'étau : illustration



Interlude : résumé

A vous de jouer : construisez un “résumé” en quelques points des éléments essentiels de cette séance.

- def de bornée (maj. / min), croissance décroissance monotonie.
-
- Thm : calculs pour les limites, Thm de l'Étau.
- Thm de : croissance + majorée, décroissance + minorée } ⇒ convergence